Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas

Examen de Análisis Matemático I – febrero 2014

1. Sea (E, d) un espacio métrico. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) (E, d) es completo.

   b) Para toda sucesión $\{F_n\}$ de subconjuntos cerrados no vacíos de E tales que $F_{n+1} \subseteq F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{\mathrm{diam}(F_n)\} \to 0$, se verifica que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

2. Estudia si el campo escalar definido por:

$$f(x,y) = xy\frac{\mathrm{sen}(x^2) - \mathrm{sen}(y^2)}{x^2+y^2}, \quad f(0,0) = 0$$

   es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$. Calcula $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$ e indica si es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

3. Clasifica los puntos críticos del campo escalar

$$f(x,y) = x^3 - y^3 + x^2y + y + 1$$

   y calcula sus extremos absolutos en la bola euclídea $B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 2\right\}$.

4. Justifica que existen dos campos escalares u y v de clase $\mathcal{C}^\infty$ definidos en un entorno abierto U del punto $(1,0)$ verificando que $u(1,0) = 0$, $v(1,0) = 1$ y para todo $(x,y)\in U$:

$$\begin{aligned} x^2u(x,y) + 2yv(x,y) + xy &= 0 \\ yu(x,y)^2 + 3u(x,y)v(x,y) + v(x,y)x^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

   Sea $(s,t) \mapsto f(s,t)$ un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2$ definido en un entorno abierto de $(0,1)$ y definamos $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$. Calcula $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(1,0)$ sabiendo que $D_1f(0,1) = D_2f(0,1) = D_{11}f(0,1) = D_{22}f(0,1) = 1$.

5. Elegir uno de los temas:

   a) Norma de una aplicación lineal. El espacio normado $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

   b) Caracterización topológica de los espacios normados finito dimensionales.

Pondré las calificaciones y las soluciones en el SWAD antes del día 13. Revisión de exámenes el próximo jueves día 13 de 16:00 a 18:00 en mi despacho.

Granada, 7 de febrero de 2014